

Řešení početní části zkouškové písemky z 16.1.2006

MA pro F, 3. semestr

1. [7b] Spočtete

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Řešení, varianta I: Pro pevné $\beta > 0$ formálně zderivujeme podle proměnné α :

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} \cdot (-x^2)}{x} dx = - \int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} dx \stackrel{[\alpha x^2 = y]}{=} - \frac{1}{2\alpha} \int_0^\infty e^{-y} dy = - \frac{1}{2\alpha}. \quad (1)$$

Odůvodnění derivování: pro pevné $\beta > 0$ je $I(\beta, \beta) = 0$ (tedy integrál konverguje pro jedno pevné $\alpha = \beta$), a derivovaná funkce má integrabilní majorantu

$$|x e^{-\alpha x^2}| \leq x e^{-\alpha_0 x^2} \in L^1(0, \infty), \quad \forall \alpha \geq \alpha_0 > 0,$$

derivovat tedy lze pro všechna taková α . Protože však $\alpha_0 > 0$ může být libovolné pevné, je náš výpočet odůvodněn pro všechna $\alpha > 0$. Přintegrováním (1) podle α dostaneme

$$I(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \ln \alpha + f(\beta),$$

protože však $0 = I(\beta, \beta) = -\frac{1}{2} \ln \beta + f(\beta)$, máme $f(\beta) = \frac{1}{2} \ln \beta$, a tedy:

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \ln \beta - \frac{1}{2} \ln \alpha = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha} = \ln \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Řešení, varianta II: Možná někdo nemá příliš rád hledání integrabilních majorant :-). V tomto příkladě existoval postup, jak se tomuto vyhnout, pokud jste si všimli, že

$$e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2} = \left[e^{-tx^2} \right]_{t=\beta}^{t=\alpha} = \int_\beta^\alpha \frac{d}{dt} (e^{-tx^2}) dt = \int_\beta^\alpha (-x^2 e^{-tx^2}) dt,$$

a tedy

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx = \int_0^\infty \int_\beta^\alpha (-x e^{-tx^2}) dt dx.$$

Trik spočívá v prohození integračního pořadí pomocí Fubiniho věty. Tu je možno bez problémů použít, protože integrovaná funkce nemění znaménko, a tedy dvojný Lebesgueův integrál existuje. Proto

$$I(\alpha, \beta) = \int_\beta^\alpha \int_0^\infty (-x e^{-tx^2}) dx dt = \int_\beta^\alpha \left[\frac{1}{2t} e^{-tx^2} \right]_{x=0}^{x=\infty} dt = - \int_\beta^\alpha \frac{1}{2t} dt = \ln \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

2. [7b] Spočítejte plošný obsah té části plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, která leží uvnitř tělesa $x^2 + y^2 \leq 4x - 3$.

Řešení:

Plocha $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ je kuželová plocha, zatímco $x^2 + y^2 \leq 4x - 3$ lze upravit na $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$, tedy jde o válec, jehož podstavou je jednotkový kruh o středu $[2, 0]$. Počítáme tedy povrch P části kuželové plochy, která leží uvnitř tohoto válce. Parametrizace $x = x, y = y, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ je potom explicitní parametrizací této plochy a množinou, ve které „žijí“ parametry x, y , je kruh $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$. Podle toho, co víme o explicitně parametrizovaných plochách, je¹ $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$. Tedy:

$$P = \int_S 1 dS = \iint_{(x-2)^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy.$$

Spočteme

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} = \sqrt{2},$$

a tedy

$$P = \sqrt{2} \iint_{(x-2)^2 + y^2 \leq 1} 1 dx dy = \pi\sqrt{2},$$

neboť dvojný integrál představuje obsah kruhu o poloměru 1 (a středu $[2, 0]$), což by člověk mohl umět z paměti :-).

¹Indexem označujeme parciální derivování.

3. [8b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_1^2 \left(4yy' - \frac{8}{3}xy'^6 \right) dx,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 1, 2 \rangle), y(1) = 1 - \sqrt[5]{16}, y(2) = 0\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

Řešení:

Označíme-li $L(x, y, y') = 4yy' - \frac{8}{3}xy'^6$, máme $\frac{\partial L}{\partial y} = 4y'$ a $\frac{\partial L}{\partial y'} = 4y - 16xy'^5$. Euler-Lagrangeova rovnice má obecně tvar

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y},$$

tedy v našem případě

$$(4y - 16xy'^5)' = 4y'.$$

Vlevo není nutno proderivovat, všimneme si pouze členu $4y'$, který se vyskytuje na obou stranách a který odečteme, načež dostaneme $(-16xy'^5)' = 0$ neboli $xy'^5 = c = \text{const.}$ Proto

$$y'^5 = cx^{-1} \quad \Rightarrow \quad y' = cx^{-\frac{1}{5}} \quad \Rightarrow \quad y = c_1 + c_2 x^{\frac{4}{5}}.$$

Okrajové podmínky dají $c_1 + c_2 = 1 - \sqrt[5]{16}$, $c_1 + c_2 \sqrt[5]{16} = 0$. Odečtením těchto dvou rovnic dostaneme $1 - \sqrt[5]{16} = c_2(1 - \sqrt[5]{16})$, tedy $c_2 = 1$, načež $c_1 = -\sqrt[5]{16} = -\sqrt[5]{2^4}$ a jediné řešení Euler-Lagrangeovy rovnice má tedy tvar

$$y = x^{\frac{4}{5}} - 2^{\frac{4}{5}}.$$

Dodatečné úvahy za bonusové body:

1. *bonusový bod*: Zkusíme Jacobiho metodu zjišťování lokálních extrémů. Spočteme pro $y_0(x) = x^{\frac{4}{5}} - 2^{\frac{4}{5}}$:

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y'_0(x)) = -5 \cdot 16xy_0'^4 = -80 \left(\frac{4}{5}\right)^4 x^{1/5} < 0 \quad \text{v } \langle 1, 2 \rangle,$$

a protože nutnou podmínkou minima je $P(x) > 0$ v $\langle 1, 2 \rangle$, nemůže být nalezené řešení minimem daného funkcionálu.

2. *bonusový bod až dva*: Může to však být třeba lokální maximum funkcionálu Φ , což vyšetříme jako minimum funkcionálu $(-\Phi)$. Změna znaménka u Φ a tedy i u L způsobí i změnu znaménka u P , nutná podmínka minima je tedy splněna. Dále spočteme

$$Q(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_0(x), y'_0(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) = 0,$$

pomocná rovnice pro funkci ω se pak redukuje na

$$P(x)\omega'(x) = c \quad \Rightarrow \quad \omega(x) = c_1 + c_2 x^{\frac{4}{5}}.$$

Tato funkce má tu vlastnost (rozmyslete si), že pokud je identicky nenulová a přitom $\omega(1) = 0$, pak už $\omega(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \langle 1, 2 \rangle$. Protože navíc $y_0(x) \in \mathcal{C}^2(\langle 1, 2 \rangle)$ (nezapomínejte ani na tuto podmínku - podívejte se na příslušnou větu), je funkce $y_0(x) = x^{\frac{4}{5}} - 2^{\frac{4}{5}}$ lokálním minimem funkcionálu $(-\Phi)$ a tedy lokálním maximum funkcionálu Φ .

4. [8b] Funkce f splňuje $f(x) = \sinh ax$ na $\langle 0, \pi \rangle$, $a > 0$.

1. Dodefinujte ji na celé \mathbb{R} tak, aby ji bylo možno rozvinout do 2π -periodické Fourierovy řady, obsahující pouze siny.
2. Spočítejte tuto řadu. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
3. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sama o sobě lichá na $\langle -\pi, \pi \rangle$, není proto nutno ji nijak modifikovat. Z lichosti dostáváme

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sinh ax \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^\pi \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} e^{inx} \, dx,$$

s využitím vlastností komplexní exponenciely. Spočítejme nejprve

$$\int_0^\pi e^{ax} e^{inx} \, dx = \frac{1}{a + in} (e^{a\pi} e^{in\pi} - 1) = \frac{a - in}{a^2 + n^2} (e^{a\pi} (-1)^n - 1),$$

tedy

$$\operatorname{Im} \int_0^\pi e^{ax} e^{inx} \, dx = \frac{n}{a^2 + n^2} (1 + (-1)^{n+1} e^{a\pi}).$$

Pouhou záměnou $(-a)$ za a dostaneme

$$\int_0^\pi e^{-ax} e^{inx} \, dx = \frac{n}{a^2 + n^2} (1 + (-1)^{n+1} e^{-a\pi}),$$

a tedy

$$b_n = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^\pi \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} e^{inx} \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{a^2 + n^2} [1 - 1 + (-1)^{n+1} (e^{a\pi} - e^{-a\pi})] = \frac{2}{\pi} \sinh a\pi \frac{(-1)^{n+1} n}{a^2 + n^2}.$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{2}{\pi} \sinh a\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{a^2 + n^2} \sin nx,$$

a protože zperiodizovaná $\sinh ax$ (označme ji \tilde{f}) je funkce po částech \mathcal{C}^1 s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech bodech nespojitosti, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = \frac{\tilde{f}(x+) + \tilde{f}(x-)}{2}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$) dává:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 ax \, dx = \left(\frac{2}{\pi} \sinh a\pi \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2 + n^2)^2}. \quad (2)$$

Protože (spočítejte si) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 ax \, dx = \left(\frac{\sinh 2a\pi}{2a\pi} - 1 \right)$, ($a \neq 0$!) dostaneme konečně:²

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2 + n^2)^2} = \frac{\pi^2}{4 \sinh^2 a\pi} \left(\frac{\sinh 2a\pi}{2a\pi} - 1 \right), \quad a \neq 0. \quad (3)$$

²Pro $a = 0$ dává Parsevalova rovnost (2) triviální identitu $0 = 0$, ale zkuste si ve vztahu (3) spočítat na obou stranách $\lim_{a \rightarrow 0}$. Co dostanete? Je to správně? A uměli byste odůvodnit, že limitní přechod uvnitř nekonečného součtu je korektní? :-)