Příklady na 1. a 2. týden

Integrály závislé na parametru

1. Ukažte, že následující integrály jsou spojitými funkcemi proměnné na dané množině

   a) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^a(\pi - x)^a} dx,\ 0 < a < 2$ b) $\int_0^2 x^2 \cos ax,\ -\infty < a < \infty$

   c) $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^a} dx,\ 1 < a < \infty$

2. Zjistěte, pro které hodnoty parametru integrál konverguje a spočtěte jej

   a) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)} dx$ b) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x} dx$

   c) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2} dx$ d) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$

   e) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax \operatorname{arctg} bx}{x^2} dx$ f) $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} \cos bx dx$

   g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a \sin^2 x)}{\sin^2 x} dx$ h) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$

   i) $\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-ax} \cos bx dx$ j) $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x} dx$

   k) $\int_0^1 x^{-\alpha} \ln^n x dx$, n přirozené nebo 0

3. Vyšetřete průběh funkce na jejím definičním oboru

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}} dx$$

Fyzika:

4. Dokažte následující identitu často užívanou v kvantové teorii pole: $\frac{1}{abc} = 2\int_0^1 \int_0^x \frac{dy}{[a + (b-a)x + (c-b)y]^3} dx$

5. Derivováním identity

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{dz}{[b - (a-b)z]^2}$$

podle a dokažte identitu

$$\frac{1}{a^2b} = 2\int_0^1 \frac{zdz}{[b + (a-b)z]^3}.$$

6. V kvantověmechanické teorii lineárního oscilátoru dostáváme násled vlastní funkce, které odpovídají nejnižším energetickým stavům:

$$\Psi_0 = K_0 e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}, \Psi_1 = K_1 \frac{2x}{x_0} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}, \Psi_2 = K_2(\frac{4x^2}{x_0^2} - 2) e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}},$$

kde x_0, K_0, K_1, K_2 jsou konstanty.

- Ukažte, že Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 patří do prostoru $L^2(-\infty, \infty)$, tj. že k vergují integrály $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j^2(x) dx$, $j = 0, 1, 2$.
- Najděte konstanty K_j tak, aby $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j^2(x) dx = 1$, $j = 0, 1, 2$.

7. Zobrazení $Q = f(q, p)$, $P = g(q, p)$ ve fázovém prostoru představ kanonickou transformaci souřadnic a hybností q, p k novým souřadni a hybnostem Q, P, pokud uvedené relace jsou ekvivalentní relacím

$$p = \partial F / \partial q, Q = \partial F / \partial P,$$

kde funkce F je funkcí q a P. Určete, jaká kanonická transform přísluší funkci

$$F(q, P) = \int_0^q [2m(\alpha P - m\omega^2 \xi^2 / 2)]^{\frac{1}{2}} d\xi.$$

8. Hmotný bod vázaný na cykloidu $x = a(\varphi - \sin(\varphi)$, $y = -a(1$ $\cos(\varphi))$, který se pohybuje bez tření v poli tíže, koná periodický hyb. Dokažte, že perioda tohoto pohybu nezávisí na počáteční výchy (předpokládáme, počáteční výchylka představuje maximální výchylk

   Návod: Zákon zachování energie dá pro periodu kmitů výraz

$$T = 8\frac{a}{g} \int_{\pi}^{\varphi_0} \frac{1 - \cos\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} d\varphi.$$

Petr Kaplický, KMA MFF UK, +420 221 913 263, kaplicky (at) k lin.mff.cuni.cz