

Křivkový integrál

Parametrizujte následující křivky zadané implicitně pomocí

1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$
2. $x^2 = ay + b, \quad a \neq 0$
3. $x^{2/3} + y^{2/3} = a, \quad a > 0$
4. Descartesův list $x^3 + y^3 = 3axy, \quad a > 0$
5. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, volte speciálně $a = 1, b = 2, c = 2, R = 3$.

6. $(x^2 + y^2)^2 = k(x^2 - y^2), \quad k > 0$

Parametrizujte následující křivky zadané v polárních souřadnicích

7. $r^2 = k \cos(2\varphi), \quad k > 0$, srovnejte s předchozím příkladem.
8. $r^2 = k \cos(m\varphi), \quad k > 0, m \in \mathbf{N}$
9. Charakterizujte, kdy je křivka zadaná v polárních souřadnicích vztahem $r = f(\varphi)$ prostá.

Cykloida

10. Parametrizujte křivku, po které se pohybuje pevně zvolený bod kružnice o poloměru $a > 0$ při kutálení této kružnice po ose x .
11. Popište křivku, kterou opíše pevně zvolený bod hranice n -úhelníka vepsaného této kružnici.
12. K čemu (a v jakém smyslu) se tato křivka blíží pro $n \rightarrow \infty$?

Spočítejte následující křivkové integrály

13. $\int_C x^2 ds$, kde C je oblouk AB křivky $y = \ln x$, $A = (2, \ln 2)$, $B = (1, 0)$.
14. $\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$, kde C je asteroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

15. $\int_C |y| ds$, kde C je lemniskáta $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.
16. $\int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, kde C je obvod trojúhelníka ABC , $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, přičemž (A, B, C) je trojice uspořádaná ve smyslu orientace křivky.
17. $\int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, kde C je kružnice $x^2 + y^2 = a^2$, přičemž trojice bodů $A = (a, 0)$, $B = (0, a)$, $C = (-a, 0)$ je uspořádaná ve smyslu orientace křivky.
18. $\int_C ydx + zdy + xdz$, kde C je průsečnice ploch $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$ a trojice bodů $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (-1, 0, 0)$ je uspořádaná ve smyslu orientace křivky.
19. Ukažte, že $\int_C f(x^2 + y^2 + z^2)(xdx + ydy + zdz)$, kde f je spojitá funkce, je roven nule přes libovolnou uzavřenou křivku C .
 Spočtěte následující křivkové integrály
20. $\int_A^B (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$, kde $A = (-2, -1)$, $B = (3, 0)$.
21. $\int_A^B (2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{y^2})dx + (2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3})dy$, kde $A = (2, 1)$, $B = (1, 2)$ a křivka se nachází uvnitř prvního kvadrantu.
22. $\int_A^B \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, kde $A = (0, 0, a)$, $B = (0, b, 0)$ a křivka prochází mimo počátek.